Урок №57,58 **Л-230911** **02.12.2023**

Тема: Производные тригонометрических функций.Производная сложной функции

Срок сдачи работ до 03.12.2023

Теоретическая часть:

Найдите производную функции (УСНО) (На первый взгляд задания сложные, но после соответствующих преобразований задания становятся проще):

	подсказка	ответ
1) $y=\frac{x^6-x^5}{x^2}$;	$y=x^4-x^3$	$y'=4x^3-3x^2$
2) $y=(x^2+1)(x^2-1)$;	$y=x^4-1$	$y'=4x^3$
3) $y=\cos^2 x+\sin^2 x$;	$y=1$	$y'=0$
5) $y=(x-2)(x^2+2x+4)$;	$y=x^3-8$	$y'=3x^2$
6) $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$.	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Построим вывод формул производных тригонометрических функций:

Пример: Найти производную функции по определению: $y=\sin x.$.

Решение. Значению аргумента x соответствует значение функции $y(x)=\sin x$, а значению $x+\Delta x$ соответствует значение функции $y(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$.

Найдем приращение функции:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

По определению производной имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{2\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x \, .$$

Пример: Найти производную функции по определению: $y = \cos x$.

Пример: Найти производную функции по определению: $y = tgx$.

Пример: Найти производную функции по определению: $y = ctgx$.

<u>Производная сложной функции</u>

Пример Постановка проблемной ситуации: найти производную функции *y=ln(* cos*x)*.

*Мы имеем здесь логарифмическую функцию, аргументом которой служит не независимая переменная **x**, а функция **cosx** этого переменного.*

Как называются такого рода функции?

[Такого рода функции называются сложными функциями или функциями от функций.]

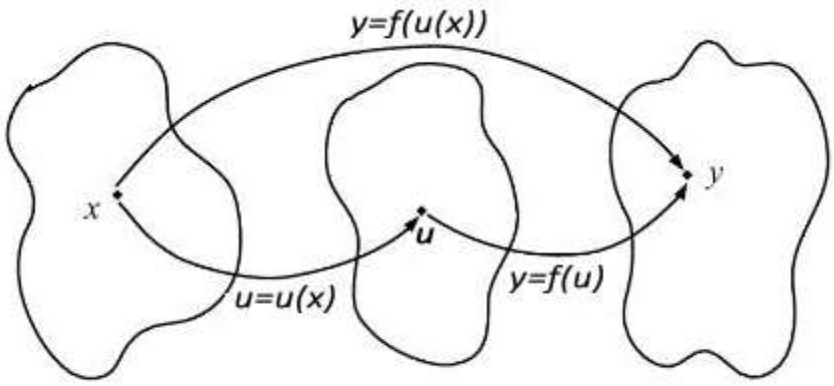
Умеем ли мы находить производные сложных функций?

[Нет.]

Значит, с чем мы должны сейчас познакомиться?

[С нахождением производной сложных функций.]

Пусть $y = f(u)$, а $u = u(x)$. Получаем функцию y, зависящую от аргумента x: $y = f(u(x))$. Последняя функция называется функцией от функции или *сложной функцией*.



Областью определения функции *y = f(u(x))* является либо вся область определения функции u=u(x) либо та ее часть, в которой определяются значения u, не выходящие из области определения функции $y= f(u)$.

Операция "функция от функции" может проводиться не один раз, а любое число раз.

Установим правило дифференцирования сложной функции.

Если $y = f(u)$ и u=u(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная функции от функции (или сложной функции) $y=f(u(x))$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу u на производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Если функцию $y=f(x)$ можно представить в виде $y=f(u)$, $u=u(v)$, $v=v(x)$, то нахождение производной y'_x осуществляется последовательным применением предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Применяя эту же теорему для u'_x получаем

$$y'_x = {}'_x \cdot u'_v \cdot v'_x = f'_u(u) \cdot u'_v(v) \cdot v'_x(x).$$

Правило:

1. Чтобы найти производную сложной функции, надо ее правильно прочитать;
2. Чтобы правильно прочитать функцию, надо определить в ней порядок действий;
3. Функцию читаем в обратном порядку действия направлении;
4. Производную находим по ходу чтения функции.

Принцип дифференцирования сложной функции можно образно назвать «принципом матрешки».

Нахождение производной сложной функции сравнимо с извлечением матрешек. Сначала находится производная внешней функции (открывается большая матрешка). Она умножается на производную более внутренней *функции (матрешка чуть меньше), которая, в свою очередь, умножается на производную еще более внутренней функции (еще меньшая матрешка) и так далее (самая маленькая матрешка). При нахождении производных функций, входящих в сложную функцию, пользуются правилами дифференцирования и таблицей производных.*

Пример: Функция $y = \ln(\cos x)$ получается последовательным выполнением двух операций: взятия косинуса угла x и нахождения от этого числа натурального логарифма:

$$x \to \cos x \to \ln\cos x.$$

***Функция читается так*:** логарифмическая функция от тригонометрической функции.

Продифференцируем функцию: $y = \ln(\cos x) = \ln u$, $u = \cos x$.

$$y' = [\ln u]' \cdot (\cos x)' = \frac{1}{u} \cdot (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x).$$

На практике такое дифференцирование производится гораздо короче и проще, во всяком случае, без введения записи u.

Искусство дифференцирования сложной функции заключается в умении видеть в момент дифференцирования только одну функцию (именно - дифференцируемую в данный момент), не замечая пока другие, откладывая их видение до момента дифференцирования.

Пример: Найти производную функции $y = (x^3 - 5x + 7)^9$.

Решение: Обозначив в «уме» $u = x^3 - 5x + 7$, получим $y = u^9$. Найдем:

$$y'_u = (u^9)_u' = 9u^8 = 9(x^3 - 5x + 7)^8$$

и $u'_x = (x^3 - 5x + 7)'_x = 3x^2 - 5$

По формуле имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 9(x^3 - 5x + 7)^8(3x^2 - 5)$.

Пример. Найти производную функции $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

1 способ:

$$y' = (\cos^2 x - \sin^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' - 2\sin x \cdot (\sin x)' =$$
$$-2\cos x \cdot \sin x - 2\sin x \cdot \cos x = --2\sin x$$

2 способ: упростим выражение $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, таким образом, *y′=-2sin2x*

Пример. Найти производную функции $y = \sin^3\left(\frac{x}{3}\right)$.

Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной тригонометрической функцией.

Первый промежуточный аргумент $u = \sin z$, второй $z = \frac{x}{3}$.

Так как $y'_u = \left(u^3\right)' = 3u^2 = 3\sin^2\frac{x}{3}$, $u'_z = \left(\sin z\right)' = \cos z = \cos\frac{x}{3}$,

$z'_x = \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3}$, то $\left(\sin^3\frac{x}{3}\right)' = 3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3} = \sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}$.

<u>ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ</u>

Анализируя теоретический материал, составим алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Находим «последнее действие», которые выполняли бы при вычислении значения функции в точке.
2. Если это +,-,*,/ то применяем правила дифференцирования
   1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
      - $(u \pm c)' = u'$
   2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
      - $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
   3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
      - $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$
      - $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$

   Если это функция (sin(…), cos(…), ln(…), $(\ldots)^n$ и т.д.), то применяем правило вычисления производной сложной функции:

   $$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

   Или таблицу:

   1) $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$;
   2) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;
   3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

   9) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
   10) $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
   11) $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

4) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;

7) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

12) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

13) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

14) $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

15) $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

3. Если в выражении сохранился знак производной, то снова пункт 1

Задания для домашней работы

1. $y = \cos 2x - 2\sin x$;

2. $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2} - \mathrm{ctg}\frac{x}{2}$;

3. $y = 3cosx + x^2$

4. $y = sin6x - 2\sqrt{x}$